ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. α) Αν $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2x+1}=2\frac{23}{30}$ να βρεθεί η τιμή του x.

   β) Δίνεται $A=4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ και $B=\frac{1}{3}A-1$

   Να βρείτε την τιμή του $A-B$

2. Οι αριθμοί 2011 και 753 διαιρούμενοι με το θετικό ακέραιο αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x.

3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε στο εσωτερικό του σημείο Δ. Να δείξετε ότι ισχύει:
   $$B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{A}\Gamma + A\hat{B}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}A$$

4. Υπάρχουν 3 κιβώτια με μπάλες. Κάθε κιβώτιο έχει διαφορετικό αριθμό μπαλών. Από το πρώτο κιβώτιο αφαιρούμε το 10% , το 20% από το δεύτερο και το 40% από το τρίτο κιβώτιο και παραμένει ίσος αριθμός μπαλών και στα τρία κιβώτια. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μπαλών που μπορεί να είχε στην αρχή το κάθε κιβώτιο.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. α) Αν $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2x+1}=2\frac{23}{30}$ να βρεθεί η τιμή του x.

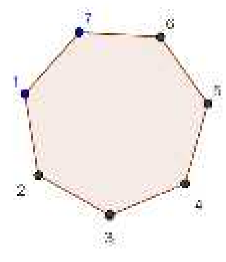
   β) Δίνεται $A=4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ και $B=\frac{1}{3}A-1$

   Να βρείτε την τιμή του $A-B$

2. Οι αριθμοί 2011 και 753 διαιρούμενοι με το θετικό ακέραιο αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x.

3. Μια ομάδα οδοιπόρων ξεκινά στις 11:00π.μ. από την πόλη Α και πρέπει να φτάσει στην πόλη Τ, που απέχει από την πόλη Α 12km, ακριβώς στις 2:00μ.μ. Περπατώντας με ταχύτητα 3km/h φτάνουν στην ενδιάμεση πόλη Β στις 12:45μ.μ. Κατά πόσο ποσοστό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητα της ομάδας για να φτάσει στην πόλη Τ ακριβώς στις 2:00μ.μ.

4. Ένα βατραχάκι κινείται με σταθερή φορά πάνω στις κορυφές του επταγώνου. Αν βρίσκεται σε κορυφή με περιττό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά μία κορυφή ενώ αν βρίσκεται σε κορυφή με ζυγό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά δύο κορυφές. Αν ξεκινήσει από την κορυφή 7, να βρείτε όλες τις πιθανές κορυφές στις οποίες μπορεί να βρεθεί μετά από 2011 πηδήματα.



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

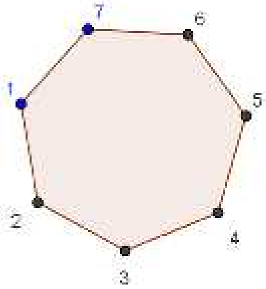
ΘΕΜΑΤΑ

1. Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=5$ με α,β θετικοί αριθμοί να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$

2. Κύκλος εφάπτεται με ευθεία στο σημείο Ρ. Αν Τ σημείο της εφαπτομένης ώστε ΡΤ=20cm και η μικρότερη απόσταση του Τ από την περιφέρεια του κύκλου είναι 10cm να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου συναρτήσει του π.

3. Μια ομάδα οδοιπόρων ξεκινά στις 11:00π.μ. από την πόλη Α και πρέπει να φτάσει στην πόλη Τ, που απέχει από την πόλη Α 12km, ακριβώς στις 2:00μ.μ. Περπατώντας με ταχύτητα 3km/h φτάνουν στην ενδιάμεση πόλη Β στις 12:45μ.μ. Κατά πόσο ποσοστό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητα της ομάδας για να φτάσει στην πόλη Τ ακριβώς στις 2:00μ.μ.

4. Ένα βατραχάκι κινείται με σταθερή φορά πάνω στις κορυφές του επταγώνου. Αν βρίσκεται σε κορυφή με περιττό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά μία κορυφή ενώ αν βρίσκεται σε κορυφή με ζυγό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά δύο κορυφές. Αν ξεκινήσει από την κορυφή 7, να βρείτε όλες τις πιθανές κορυφές στις οποίες μπορεί να βρεθεί μετά από 2011πηδήματα.



	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ ***ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ*** ***ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011*** ***Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ*** *Ημερομηνία: 05/11/2011* *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:
$$4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2)^2 = (\beta - \alpha + \gamma)(\beta + \alpha - \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)$$

2. Αν $\alpha, \beta, \gamma \neq 0 \quad είναι\ πραγματικοί\ αριθμοί\ με\ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ και ισχύει
$$\alpha + \frac{4}{\beta} = \beta + \frac{4}{\gamma} = \gamma + \frac{4}{\alpha}$$
α) Να αποδείξετε ότι $\beta\gamma = \frac{4(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta}$, $\alpha\gamma = \frac{4(\gamma-\alpha)}{\beta-\gamma}$, $\alpha\beta = \frac{4(\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha}$ και να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του γινομένου $\alpha\beta\gamma$.
β) Να εξετάσετε την περίπτωση αν θα μπορούσε να ισχύει το προηγούμενο, όταν και οι τρείς πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί.

3. α) Έστω ν περιττός ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\nu^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.
β) Αν οι αριθμοί x, y είναι περιττοί ακέραιοι αριθμοί τότε ο αριθμός $x^2 + y^2$ είναι άρτιος αριθμός αλλά όχι διαιρετός με το 4.

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma\ με\ AB < A\Gamma$ και M, P τα μέσα των πλευρών του $AB\ και\ B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την πλευρά του AB προς το μέρος του B και παίρνουμε πάνω στην προέκταση σημείο N τέτοιο ώστε $MN = \frac{A\Gamma}{2}$. Έστω E το σημείο τομής της NP με την πλευρά $A\Gamma$ και Λ, H τα σημεία τομής της διχοτόμου (δ) της γωνίας $\angle BA\Gamma$ με τα τμήματα $MP\ και\ NE$ αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το σημείο P προς την AB τέμνει την (δ) στο σημείο Σ και η παράλληλη από το σημείο Λ προς την AB τέμνει την NE στο σημείο Δ, να αποδείξετε:
α)Το τρίγωνο ΔANE είναι ισοσκελές και
β)Το τετράπλευρο $\Lambda P\Sigma\Delta$ είναι ρόμβος.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/11 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:
1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Αν $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $x + y + \omega = 3$, να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} |x + y - 2\omega| = |x| - |y| \\ |y + \omega - 2x| = |y| - |\omega| \\ |\omega + x - 2y| = |\omega| - |x| \end{cases}$$

2. Σε τρίγωνο $\Delta AB\Gamma$ $\mu\varepsilon$ $A\Gamma > AB$ το M είναι το μέσον της $B\Gamma$, $A\Delta$ είναι το ύψος του και E, Z οι προβολές των κορυφών B, Γ αντίστοιχα πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\angle BA\Gamma$ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:
$$ME = MZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$

3. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 + 5x - \lambda$. Να βρείτε το $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\lambda \neq 0$ ώστε η μέγιστη τιμή της f να γίνεται ελάχιστη.

4. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m $\kappa\alpha\iota$ n έτσι ώστε ο n να διαιρεί τον $2m - 1$ και ο m να διαιρεί τον $2n - 1$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/11 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Σε τρίγωνο $\varDelta AB\varGamma$ $με$ $A\varGamma > AB$ το M είναι το μέσον της $B\varGamma$, $A\varDelta$ είναι το ύψος του και E, Z οι προβολές των κορυφών $B, \varGamma$ αντίστοιχα πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\angle BA\varGamma$ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:
$$ME = MZ = \frac{A\varGamma - AB}{2}$$

2. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2) = 9\\(x-y)(x^2+y^2) = 5\end{cases}$$

3. Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m $και$ n έτσι ώστε ο n να διαιρεί τον $2m-1$ και ο m να διαιρεί τον $2n-1$.

4. Να αποδείξετε την ανισότητα
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{36} < συν\frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{72}.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

Προτεινόμενες Λύσεις

1. α) Αν $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2x+1}=2\frac{23}{30}$ να βρεθεί η τιμή του x.

Λύση

$$\frac{65}{30}+\frac{3}{2x+1}=\frac{83}{30}$$

$$\frac{3}{2x+1}=\frac{18}{30}\Leftrightarrow\frac{3}{2x+1}=\frac{18\div 6}{30\div 6}$$

$$\frac{3}{2x+1}=\frac{3}{5}\quad\Rightarrow\ 2x+1=5\ \Rightarrow\quad x=2$$

β) Δίνεται $A=4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ και $B=\frac{1}{3}A-1$

Να βρείτε με τι ισούται το $A-B$

Λύση

$$B=\frac{1}{3}\left(4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\right)-1=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}-1$$

$$B=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}-1$$

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$$

$$A-B=\left(4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}\right)=4-\frac{1}{729}$$

$$=\frac{4\cdot 729-1}{729}=\frac{2915}{729}$$

2. Οι αριθμοί 2011 και 753 διαιρούμενοι με το θετικό ακέραιο αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x .

Λύση

Οι αριθμοί γράφονται ως:

$$2011 = x \cdot \quad + \qquad \text{και} \qquad 753 = x \cdot \quad +$$
$$1998 = x \cdot \qquad \text{και} \qquad 740 = x \cdot$$

Δηλαδή ο αριθμός x είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών 1998 και 740

Αναλύουμε τους αριθμούς 1998 και 740 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

$$1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \qquad \text{και} \qquad 740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$$

$$\text{M.K.} \;(\quad , \quad) = \quad \cdot$$

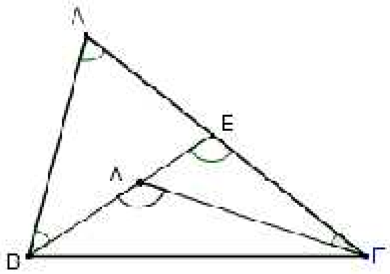
Από τους κοινούς διαιρέτες 1, 2, 37 και 74 των δύο αριθμών το x μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη από το 13.

Δηλαδή το x είναι ίσο με : 37, 74

3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε στο εσωτερικό του σημείο Δ. Να δείξετε ότι ισχύει:

$$B\hat{\ } = \hat{\ } + \hat{\ } + \hat{\ }$$
$$B\hat{\ } = \hat{\ } + \hat{\ } + \hat{\ }$$

Λύση



$B\hat{\ } = \hat{\ } + \hat{\ }$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΔΕΓ

$\Delta\hat{E}\Gamma = E\hat{A}B + E\hat{B}A$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΑΕ

Συνεπάγεται ότι $B\hat{\ } = \hat{\ } + \hat{\ } + \hat{\ }$

4. Υπάρχουν 3 κιβώτια με μπάλες. Κάθε κιβώτιο έχει διαφορετικό αριθμό μπαλών. Από το πρώτο κιβώτιο αφαιρούμε το 10% , το 20% από το δεύτερο και το 40% από το τρίτο κιβώτιο και παραμένει ίσος αριθμός μπαλών και στα τρία κιβώτια. Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μπαλών που μπορεί να είχε στην αρχή το κάθε κιβώτιο.

Λύση:

$$\frac{90x}{100}=\frac{80y}{100}=\frac{60}{100}=\kappa \quad \text{όπου κ} \quad \text{ακέραιος αριθμός}$$

$$\frac{9x}{10}=\frac{8y}{10}=\frac{6}{10}=\kappa$$

$$x=2\cdot 5\cdot\frac{\kappa}{9} \quad \text{και} \quad y=2\cdot 5\cdot\frac{\kappa}{8}=5\cdot\frac{\kappa}{4} \quad \text{και} \quad \omega=2\cdot 5\cdot\frac{\kappa}{6}=5\cdot\frac{\kappa}{3}$$

Αφού x, y, ω ακέραιοι αριθμοί τότε το κ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 9, 4, 3

$$\kappa=\text{ΕΚΠ}(9,4,3)=36$$

Τότε είναι : $x=40$, $y=45$, $\omega=60$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

Προτεινόμενες Λύσεις

1. α) Αν $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2x+1}=2\frac{23}{30}$ να βρεθεί η τιμή του x.

Λύση

$$\frac{65}{30}+\frac{3}{2x+1}=\frac{83}{30}$$

$$\frac{3}{2x+1}=\frac{18}{30} \Leftrightarrow \frac{3}{2x+1}=\frac{18\div 6}{30\div 6}$$

$$\frac{3}{2x+1}=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \; 2x+1=5 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

β) Δίνεται $A=4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$ και $B=\frac{1}{3}A-1$

Να βρείτε με τι ισούται το $A-B$

Να βρείτε με τι ισούται το $A-B$

Λύση

$$B=\frac{1}{3}\left(4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\right)-1=\frac{4}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}-1$$

$$B=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}-1$$

$$B=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$$

$$A-B=\left(4+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}\right)=4-\frac{1}{729}$$

$$=\frac{4\cdot 729-1}{729}=\frac{2915}{729}$$

2. Οι αριθμοί 2011 και 753 διαιρούμενοι με το θετικό ακέραιο αριθμό x δίνουν και οι δύο υπόλοιπο 13. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του x .

<u>Λύση</u>

Οι αριθμοί γράφονται ως:

$$2011 = x \cdot \quad + \qquad \text{και} \qquad 753 = x \cdot \quad +$$

$$1998 = x \cdot \qquad \text{και} \qquad 740 = x \cdot$$

Δηλαδή ο αριθμός x είναι κοινός διαιρέτης των αριθμών 1998 και 740

Αναλύουμε τους αριθμούς 1998 και 740 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

$$1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37 \qquad \text{και} \qquad 740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 37$$

$$\text{M.K.} \ (\quad , \quad) = \ \cdot$$

Από τους κοινούς διαιρέτες 1, 2, 37 και 74 των δύο αριθμών το x μπορεί να πάρει τιμή μεγαλύτερη από το 13.

Δηλαδή το x είναι ίσο με : 37, 74

3. Μια ομάδα οδοιπόρων ξεκινά στις 11:00π.μ. από την πόλη Α και πρέπει να φτάσει στην πόλη Τ, που απέχει από την πόλη Α 12km, ακριβώς στις 2:00μ.μ. Περπατώντας με ταχύτητα 3km/h φτάνουν στην ενδιάμεση πόλη Β στις 12:45μ.μ. Κατά πόσο ποσοστό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητα της ομάδας για να φτάσει στην πόλη Τ ακριβώς στις 2:00μ.μ.

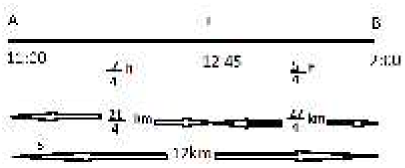
Περπατούν από τις 11:00 μέχρι της 12:45 δηλαδή για 1:45 ή για $\frac{7}{4}$ της ώρας

Ταχύτητα 3 km/h

Απόσταση ΑΓ , μέχρι 12:45 είναι $3 \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{4}\,km$

Συνολική απόσταση 12km άρα το υπόλοιπο ΒΓ=$12 - \frac{21}{4} = \frac{27}{4}\,km$

Συνολικός χρόνος 3h άρα το υπόλοιπο του χρόνου $3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}h$

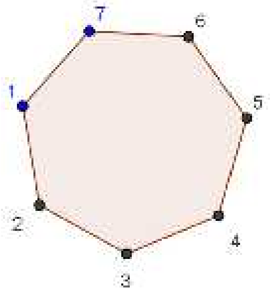


Νέα ταχύτητα $\frac{27}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{27}{5} = 5{,}4\frac{km}{h}$

Αύξηση 2,4 km/h

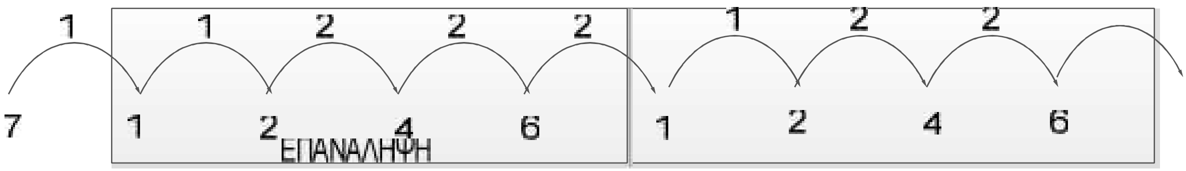
Το 2,4 είναι το 80% του 3 άρα η ταχύτητα αυξάνεται κατά 80% της αρχικής.

4. Ένα βατραχάκι κινείται με σταθερή φορά πάνω στις κορυφές του επταγώνου. Αν βρίσκεται σε κορυφή με περιττό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά μία κορυφή ενώ αν βρίσκεται σε κορυφή με ζυγό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά δύο κορυφές. Αν ξεκινήσει από την κορυφή 7, να βρείτε όλες τις πιθανές κορυφές στις οποίες μπορεί να βρεθεί μετά από 2011 πηδήματα.



Περίπτωση 1η

Κίνηση με φορά αντίθετη του ρολογιού:



Παρατηρούμε ότι κάθε 4 πηδήματα επαναλαμβάνετε η διαδικασία

$$2011 \div 4 = 502\frac{3}{4}$$

Άρα θα γίνουν 502 επαναλήψεις και θα υπολείπονται 3 πηδήματα.

7 → 1→ 2 → 4

Άρα θα φτάσει στην θέση 4

Περίπτωση 2η : φορά ρολογιού

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολείπονται 3 πηδήματα

7 → 6→ 4→ 2

Άρα θα φτάσει στην θέση 2

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011 *Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00*

1. Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 5$ με α,β θετικοί αριθμοί να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$

   Λύση;

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 5 \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) = \sqrt{5}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\beta^3}{\alpha^3}+\frac{3\alpha}{\beta}+\frac{3\beta}{\alpha} \Longrightarrow$$

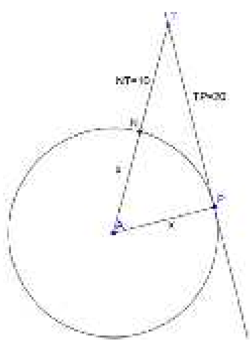
$$\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\beta^3}{\alpha^3} = \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\beta^3}{\alpha^3} = (\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5}) \Longrightarrow$$

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\beta^3}{\alpha^3} = 5(\sqrt{5}) - 3(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

2. Κύκλος εφάπτεται με ευθεία στο σημείο Ρ. Αν Τ σημείο της εφαπτομένης ώστε ΡΤ=20cm και η μικρότερη απόσταση του Τ από την περιφέρεια του κύκλου είναι 10cm να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου συναρτήσει του π.

   ΡΤ εφαπτομένη με Τ σημείο του κύκλου άρα $\hat{P} = 90^o$



$$(AT)^2 = (TP)^2 + (AP)^2 \ \text{Πυθαγ.Θεωρ.}$$

$$(x + 10)^2 = x^2 + 20^2$$

$$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 400$$

$$x = 15$$

$$\text{Εμβαδόν} = \pi r^2 = 225\pi$$

3. Μια ομάδα οδοιπόρων ξεκινά στις 11:00π.μ. από την πόλη Α και πρέπει να φτάσει στην πόλη Τ, που απέχει από την πόλη Α 12km, ακριβώς στις 2:00μ.μ. Περπατώντας με ταχύτητα 3km/h φτάνουν στην ενδιάμεση πόλη Β στις 12:45μ.μ. Κατά πόσο ποσοστό πρέπει να μεταβληθεί η ταχύτητα της ομάδας για να φτάσει στην πόλη Τ ακριβώς στις 2:00μ.μ.

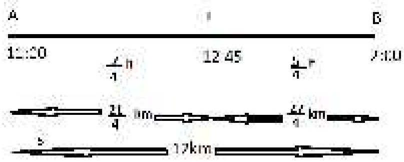
Περπατούν από τις 11:00 μέχρι της 12:45 δηλαδή για 1:45 ή για $\frac{7}{4}$ της ώρας

Ταχύτητα 3 km/h

Απόσταση ΑΓ , μέχρι 12:45 είναι $3 \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{4}\,km$

Συνολική απόσταση 12km άρα το υπόλοιπο ΒΓ=$12 - \frac{21}{4} = \frac{27}{4}\,km$

Συνολικός χρόνος 3h άρα το υπόλοιπο του χρόνου $3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}h$

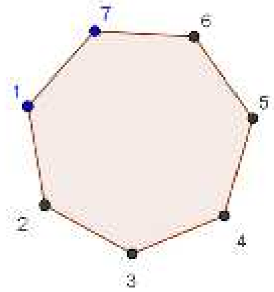


Νέα ταχύτητα $\frac{27}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{27}{5} = 5{,}4\frac{km}{h}$

Αύξηση 2,4 km/h

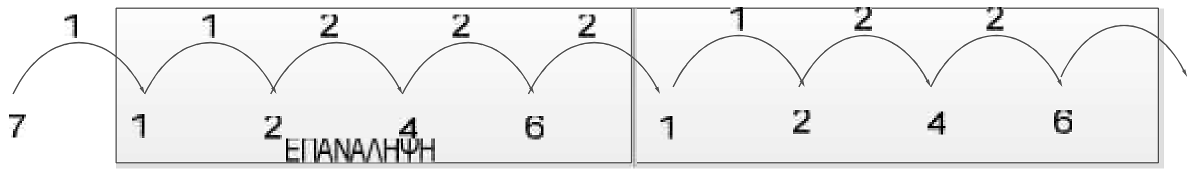
Το 2,4 είναι το 80% του 3 άρα η ταχύτητα αυξάνεται κατά 80% της αρχικής.

4. Ένα βατραχάκι κινείται με σταθερή φορά πάνω στις κορυφές του επταγώνου. Αν βρίσκεται σε κορυφή με περιττό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά μία κορυφή ενώ αν βρίσκεται σε κορυφή με ζυγό αριθμό τότε πηδά και μετακινείται κατά δύο κορυφές. Αν ξεκινήσει από την κορυφή 7, να βρείτε όλες τις πιθανές κορυφές στις οποίες μπορεί να βρεθεί μετά από 2011 πηδήματα.



Περίπτωση $1^{η}$

Κίνηση με φορά αντίθετη του ρολογιού:



Παρατηρούμε ότι κάθε 4 πηδήματα επαναλαμβάνετε η διαδικασία

$$2011 \div 4 = 502\frac{3}{4}$$

Άρα θα γίνουν 502 επαναλήψεις και θα υπολείπονται 3 πηδήματα.

7 → 1→ 2 → 4

Άρα θα φτάσει στην θέση 4

Περίπτωση $2^{η}$: φορά ρολογιού

Με τον ίδιο τρόπο θα υπολείπονται 3 πηδήματα

7 → 6→ 4→ 2

Άρα θα φτάσει στην θέση 2

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/2011

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β,γ ισχύει:

$$4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)^2=(\beta-\alpha+\gamma)(\beta+\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)$$

ΛΥΣΗ

Η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}4\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)^2&=(2\alpha\gamma-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)(2\alpha\gamma+\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)\\&=[\beta^2-(\alpha-\gamma)^2][(\alpha+\gamma)^2-\beta^2]\\&=(\beta-\alpha+\gamma)(\beta+\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\gamma-\beta).\end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ $\quad$ *είναι πραγματικοί αριθμοί με* $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$ και ισχύει

$$\alpha+\frac{4}{\beta}=\beta+\frac{4}{\gamma}=\gamma+\frac{4}{\alpha}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=\frac{4(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta}$, $\alpha\gamma=\frac{4(\gamma-\alpha)}{\beta-\gamma}$, $\alpha\beta=\frac{4(\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha}$ και να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του γινομένου $\alpha\beta\gamma$.

β) Να εξετάσετε την περίπτωση αν θα μπορούσε να ισχύει το προηγούμενο, όταν και οι τρείς πραγματικοί αριθμοί α,β,γ είναι θετικοί.

ΛΥΣΗ

α)Από την δεδομένη σχέση έχουμε

$$\alpha-\beta=\frac{4}{\gamma}-\frac{4}{\beta}=\frac{4(\beta-\gamma)}{\beta\gamma}\Leftrightarrow\beta\gamma=\frac{4(\beta-\gamma)}{\alpha-\beta}$$
$$\beta-\gamma=\frac{4}{\alpha}-\frac{4}{\gamma}=\frac{4(\gamma-\alpha)}{\alpha\gamma}\Leftrightarrow\alpha\gamma=\frac{4(\gamma-\alpha)}{\beta-\gamma}$$
$$\gamma-\alpha=\frac{4}{\beta}-\frac{4}{\alpha}=\frac{4(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}\Leftrightarrow\alpha\beta=\frac{4(\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$(\alpha\beta\gamma)^2=64\Leftrightarrow\alpha\beta\gamma=\pm 8.$$

β) Αν $\alpha,\beta,\gamma\epsilon\mathbb{R}^+$ τότε θα υπάρχει μια διάταξη έστω $\alpha<\beta<\gamma$ και θα είχαμε

$$\beta-\gamma<0\Leftrightarrow\frac{4(\gamma-\alpha)}{\alpha\gamma}<0\ \text{ άρα }\ \gamma-\alpha<0\ \text{άτοπο}.$$

Άρα δεν ισχύει το προηγούμενο για $\alpha,\beta,\gamma\epsilon\mathbb{R}^+$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

α) Έστω ν περιττός ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\nu^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8.

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι περιττοί ακέραιοι αριθμοί τότε ο αριθμός $x^2 + y^2$ είναι άρτιος αριθμός αλλά όχι διαιρετός με το 4.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\nu = 2\kappa + 1,\ \kappa \epsilon \mathbb{Z}$, τότε θα έχουμε

$$\nu^2 - 1 = (2\kappa + 1)^2 - 1 = 4\kappa^2 + 4\kappa = 4\kappa(\kappa + 1)$$

και επειδή οι αριθμοί $\kappa, \kappa + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί και άρα $\kappa(\kappa + 1) = 2\lambda,\ \lambda \epsilon \mathbb{Z}$, και επομένως παίρνουμε

$$\nu^2 - 1 = 4 \cdot 2\lambda = 8\lambda = \pi o \lambda \lambda \alpha \pi \lambda \acute{\alpha} \sigma \iota o\ \tau o \upsilon\ 8.$$

β) Από το α) έχουμε $x^2 - 1 = 8k, k \epsilon \mathbb{Z}\ \kappa\alpha\iota\ y^2 - 1 = 8m$, άρα παίρνουμε

$$x^2 + y^2 = 8(k + m) + 2 = 4(2k + 2m) + 2$$

Επομένως ο άρτιος αριθμός $x^2 + y^2$ δεν διαιρείται με το 4.

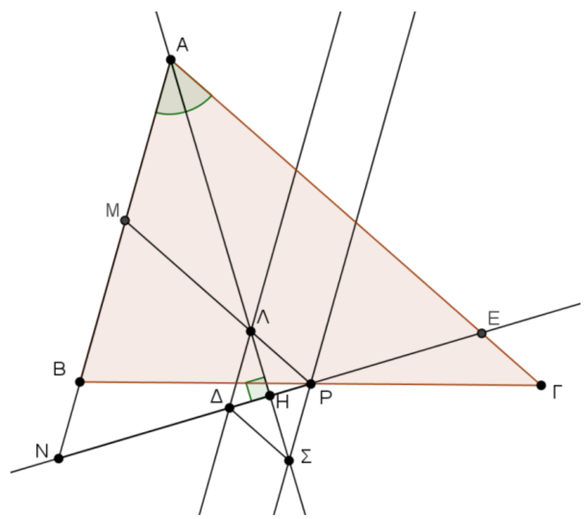
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma\ \mu\varepsilon\ AB < A\Gamma$ και M, P τα μέσα των πλευρών του $AB\ \kappa\alpha\iota\ B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την πλευρά του AB προς το μέρος του B και παίρνουμε πάνω στην προέκταση σημείο N τέτοιο ώστε $MN = \frac{A\Gamma}{2}$. Έστω E το σημείο τομής της NP με την πλευρά $A\Gamma$ και Λ, H τα σημεία τομής της διχοτόμου (δ) της γωνίας $\angle BA\Gamma$ με τα τμήματα $MP\ \kappa\alpha\iota\ NE$ αντίστοιχα. Αν η παράλληλη από το σημείο P προς την AB τέμνει την (δ) στο σημείο Σ και η παράλληλη από το σημείο Λ προς την AB τέμνει την NE στο σημείο Δ, να αποδείξετε:

α)Το τρίγωνο ΔANE είναι ισοσκελές και

β)Το τετράπλευρο $\Lambda P\Sigma\Delta$ είναι ρόμβος.

ΛΥΣΗ



α)Επειδή M, P τα μέσα των πλευρών $AB\ \kappa\alpha\iota\ B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$, έχουμε $MP =// \frac{A\Gamma}{2}$, άρα $MN = MP$ και επομένως το τρίγωνο MPN είναι ισοσκελές και άρα $\angle MPN = \angle MNP$ (1).

Επίσης $MP\ //\ A\Gamma$, άρα $\angle MPN = \angle AEN.$ (2)

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΔANE είναι ισοσκελές.

β) Αφού το τρίγωνο ΔANE είναι ισοσκελές και AH διχοτόμος της γωνίας $\angle BA\Gamma$ θα έχουμε ότι $AH \perp NE$.

Επειδή από την υπόθεση έχουμε $\Lambda P\ //\ A\Gamma$ και $\Lambda\Delta\ //\ AN$, τότε $\angle BA\Gamma = \angle \Delta\Lambda P$ και επομένως το ΛH διχοτόμος και ύψος του $\Delta\Delta\Lambda P$, άρα $\Lambda\Delta = \Lambda P$ (3). Επίσης από τις παραλληλίες του προβλήματος έχουμε: $\angle H\Lambda P = \angle HA\Gamma = \angle \frac{BA\Gamma}{2}\ \kappa\alpha\iota\ \angle P\Sigma\Lambda = \angle HAB = \angle \frac{BA\Gamma}{2}$, δηλαδή το $\Delta\Lambda P\Sigma$ είναι ισοσκελές άρα $\Lambda P = P\Sigma$ (4). Τελικά, αφού $\Lambda\Delta\ //\ P\Sigma$ και από τις (3) και (4) $\Lambda\Delta = P\Sigma$, το $\Lambda P\Sigma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιους, άρα ρόμβος.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/11

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Αν $x, y, \omega \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $x + y + \omega = 3$, να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} |x + y - 2\omega| = |x| - |y| \\ |y + \omega - 2x| = |y| - |\omega| \\ |\omega + x - 2y| = |\omega| - |x| \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x + y + \omega = 3$, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3|1 - \omega| = |x| - |y| \\ 3|1 - x| = |y| - |\omega| \\ 3|1 - y| = |\omega| - |x| \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις του συστήματος παίρνουμε

$$3(|1 - \omega| + |1 - x| + |1 - y|) = 0 \Leftrightarrow 1 - \omega = 1 - x = 1 - y = 0$$

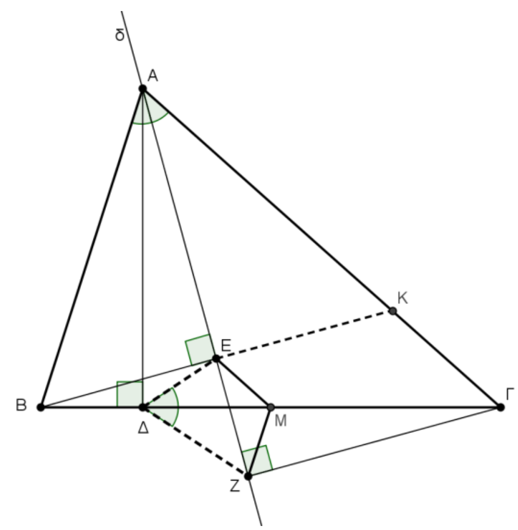
Άρα έχουμε $x = 1, y = 1, \omega = 1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Σε τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ $\mu\varepsilon$ $A\Gamma > AB$ το M είναι το μέσον της $B\Gamma$, $A\varDelta$ είναι το ύψος του και E, Z οι προβολές των κορυφών B, Γ αντίστοιχα πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\angle BA\Gamma$ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

$$ME = MZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$

ΛΥΣΗ



Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε:
Το τρίγωνο $\varDelta ABK$ είναι ισοσκελές (K το σημείο τομής της προέκτασης της BE με την $A\Gamma$). Άρα επειδή E μέσο της ΒΚ και Μ μέσο της ΒΓ θα έχουμε $EM =\parallel \frac{K\Gamma}{2}$.

Επομένως, αφού $EM \parallel A\Gamma$ έπεται $\angle ZEM = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ (1)

Το τετράπλευρο $AB\varDelta E$ είναι εγγράψιμο άρα $\angle E\varDelta M = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ (2). Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο $A\Gamma Z\varDelta$ παίρνουμε $\angle M\varDelta Z = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ (3)

Από τις (1) και (3) το τετράπλευρο $\varDelta EMZ$ εγγράψιμο, επομένως $\angle MZE = \angle E\varDelta M = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ *από την* (2), και λόγω της (1) το τρίγωνο $\varDelta MEZ$ είναι ισοσκελές δηλαδή $ME = MZ$. Τελικά

$$MZ = EM = \frac{K\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AK}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 + 5x - \lambda$. Να βρείτε το $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\lambda \neq 0$ ώστε η μέγιστη τιμή της f να γίνεται ελάχιστη.

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχάς έχουμε $\lambda < 0$ για να έχει μέγιστη τιμή η f, και η μέγιστη τιμή της είναι

$$y = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = f\left(-\frac{5}{2\lambda}\right) = \lambda\left(-\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + 5\left(-\frac{5}{2\lambda}\right) - \lambda = \frac{-25 - 4\lambda^2}{4\lambda} > 0.$$

Άρα

$$y = \frac{-25 - 4\lambda^2}{4\lambda} \Leftrightarrow 4\lambda y = -25 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda y + 25 = 0 \quad (1)$$

Επειδή $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 16y^2 - 16 \cdot 25 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -5 \text{ ή } y \geq 5$$

και αφού $y > 0$ η ελάχιστη τιμή του y είναι $y = 5$, επομένως για $y = 5$ η (1) γίνεται

$$4\lambda^2 + 20y + 25 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{2} < 0.$$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4</u>

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m $και$ n έτσι ώστε ο n να διαιρεί τον $2m-1$ και ο m να διαιρεί τον $2n-1$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ζητούμε $m, n\epsilon\mathbb{N}$ έτσι ώστε $2m-1=kn,\ n\epsilon\mathbb{N}\ \ και\ 2n-1=\lambda m,\ \lambda\epsilon\mathbb{N}$.
Απαλείφοντας το n από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$m(4-k\lambda)=k+2$$

Επίσης, απαλείφοντας το m από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$n(4-k\lambda)=\lambda+2$$

Αφού $k+2>0\ \ και\ \lambda+2>0\ \Rightarrow 4-k\lambda>0 \Rightarrow k\lambda<4$. Άρα $k\lambda=1$ ή $k\lambda=2$ ή $k\lambda=3$.

<u>$1^η$ περίπτωση</u>: $k\lambda=1 \Rightarrow k=\lambda=1 \Rightarrow m=n=1$.

<u>$2^η$ περίπτωση</u>: $k\lambda=2 \Rightarrow k=1, \lambda=2$ ή $k=2, \lambda=1$.

Αν $k=1, \lambda=2 \ \Rightarrow 2m=3 \Rightarrow m=\frac{3}{2}, άτοπο.$

Αν $k=2, \lambda=1 \Rightarrow 2n=3 \Rightarrow n=\frac{3}{2}, άτοπο.$

<u>$3^η$ περίπτωση</u>: $k\lambda=3 \Rightarrow k=1, \lambda=3$ ή $k=3, \lambda=1$.

Αν $k=1, \lambda=3 \ \Rightarrow m=3, n=5$.

Αν $k=3, \lambda=1 \Rightarrow m=5, n=3$.

Άρα λύσεις $(1,1), (3,5), (5,3)$.

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/11/11

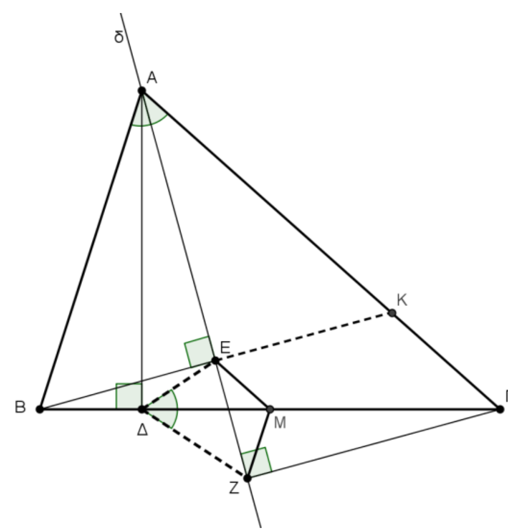
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Σε τρίγωνο $\varDelta AB\Gamma$ $\;\mu\varepsilon\;$ $A\Gamma > AB$ το M είναι το μέσον της $B\Gamma$, $A\varDelta$ είναι το ύψος του και E, Z οι προβολές των κορυφών B, Γ αντίστοιχα πάνω στην διχοτόμο της γωνίας $\angle BA\Gamma$ του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

$$ME = MZ = \frac{A\Gamma - AB}{2}$$

ΛΥΣΗ



Από τις υποθέσεις του προβλήματος έχουμε:
Το τρίγωνο $\varDelta ABK$ είναι ισοσκελές (K το σημείο τομής της προέκτασης της BE με την $A\Gamma$). Άρα επειδή E μέσο της ΒΚ και Μ μέσο της ΒΓ θα έχουμε $EM =\parallel \frac{K\Gamma}{2}$.
Επομένως, αφού $EM \parallel A\Gamma$ έπεται $\angle ZEM = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ (1)
Το τετράπλευρο $AB\varDelta E$ είναι εγγράψιμο άρα $\angle E\varDelta M = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ (2). Επίσης από το εγγράψιμο τετράπλευρο $A\Gamma Z\varDelta$ παίρνουμε $\angle M\varDelta Z = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ (3)
Από τις (1) και (3) το τετράπλευρο $\varDelta EMZ$ εγγράψιμο, επομένως
$\angle MZE = \angle E\varDelta M = \angle\frac{BA\Gamma}{2}$ *από την* (2), και λόγω της (1) το τρίγωνο $\varDelta MEZ$ είναι ισοσκελές δηλαδή $ME = MZ$. Τελικά

$$MZ = EM = \frac{K\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AK}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν $x, y \in \mathbb{R}$ να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases}(x+y)(x^2-y^2) = 9\\(x-y)(x^2+y^2) = 5\end{cases}$$

ΛΥΣΗ

Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος έχουμε

$$(x+y)^2(x-y) + (x-y)(x^2+y^2) = 14 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 7 \;\; (1).$$

Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις του συστήματος έχουμε

$$(x+y)^2(x-y)-(x-y)(x^2+y^2)=4 \Leftrightarrow (x-y)xy=2 \ \ (2).$$

Η (1) γράφεται

$$(x-y)[(x-y)^2+2xy+xy]=7 \Leftrightarrow (x-y)^3+3xy(x-y)=7$$

και λόγω της (2) η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$(x-y)^3+3\cdot 2=7 \Leftrightarrow (x-y)^3=1 \Leftrightarrow x-y=1$$

Άρα η λύση του συστήματος $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$

δίνει τις λύσεις $(2,1),(-1,-2)$.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3</u>

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακεραίους m *και* n έτσι ώστε ο n να διαιρεί τον $2m-1$ και ο m να διαιρεί τον $2n-1$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Ζητούμε $m,n\epsilon\mathbb{N}$ έτσι ώστε $2m-1=kn,\ n\epsilon\mathbb{N}\ \ \kappa\alpha\iota\ 2n-1=\lambda m,\ \lambda\epsilon\mathbb{N}$.

Απαλείφοντας το n από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$m(4-k\lambda)=k+2$$

Επίσης, απαλείφοντας το m από τις δύο εξισώσεις έχουμε

$$n(4-k\lambda)=\lambda+2$$

Αφού $k+2>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \lambda+2>0\ \Rightarrow 4-k\lambda>0 \Rightarrow k\lambda<4$. Άρα $k\lambda=1$ ή $k\lambda=2$ ή $k\lambda=3$.

<u>1η περίπτωση</u>: $k\lambda=1 \Rightarrow k=\lambda=1 \Rightarrow m=n=1$.

<u>2η περίπτωση</u>: $k\lambda=2 \Rightarrow k=1,\lambda=2$ ή $k=2,\lambda=1$.

Αν $k=1,\lambda=2 \ \Rightarrow 2m=3 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$, *άτοπο*.

Αν $k=2,\lambda=1 \Rightarrow 2n=3 \Rightarrow n=\frac{3}{2}$, *άτοπο*.

<u>3η περίπτωση</u>: $k\lambda=3 \Rightarrow k=1,\lambda=3$ ή $k=3,\lambda=1$.

Αν $k=1,\lambda=3 \ \Rightarrow m=3,n=5$.

Αν $k=3,\lambda=1 \Rightarrow m=5,n=3$.

Άρα λύσεις $(1,1),(3,5),(5,3)$.

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4</u>

Να αποδείξετε την ανισότητα

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{36}<\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{72}.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x,\ x\epsilon\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και παίρνουμε

$$-\eta\mu\xi=\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{36}},\quad \xi\epsilon\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{18}\right)$$

Επομένως

$$\frac{\pi}{4}<\xi<\frac{5\pi}{18}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<\eta\mu\xi<\eta\mu\frac{5\pi}{18}\Leftrightarrow-\eta\mu\frac{5\pi}{18}<-\eta\mu\xi<-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$-\eta\mu\frac{5\pi}{18} < \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18} - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{36}} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}}{\frac{\pi}{36}} < \eta\mu\frac{5\pi}{18} < 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{72} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18} < \frac{\pi}{36}$$

και τελικά

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - -\frac{\pi}{36} < \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{72}.$$